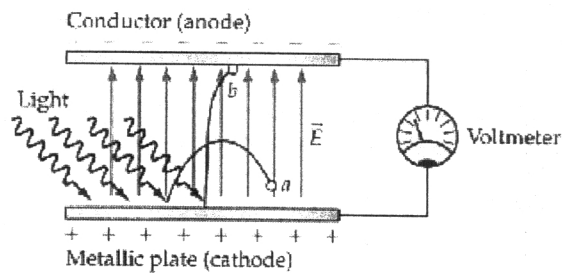
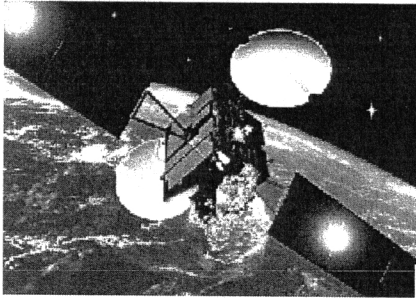


Tentamen college Quantum & Kosmos (6.2.2009, 14:00 – 17:00)

1. De Europese communicatiesatelliet Artemis werd in 2001 op een geostationnaire baan gelanceerd (een geostationnaire baan is een synchrone baan boven de evenaar waarin de satelliet in 24 uur rond de aarde gaat). Zijn zonnepanelen zijn 25 m breed (zie ook de linkerfiguur hieronder).
- Wat is de snelheid van de satelliet en zijn afstand van de Aarde?
 - Hoe vergelijkt dit met de ontsnappingsnelheid van de Aarde?
 - Neem aan dat we een optische telescoop op de maan zetten (die bij 550 nm werkt). Wat moet de diameter van die telescoop zijn om de satelliet op te lossen?



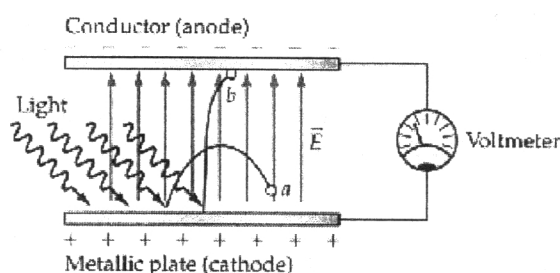
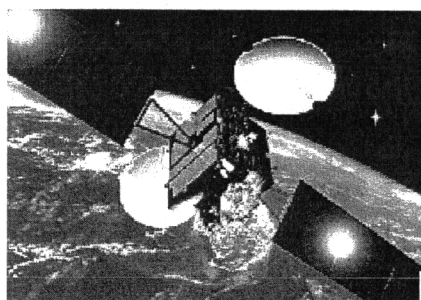
2. De rechter figuur hierboven laat een proefopstelling zien voor het fotoelectrisch effect. We nemen aan dat de metalen platen van aluminium zijn gemaakt (werkfunctie $W = 4.08 \text{ eV}$).
- Leg in je eigen woorden uit hoe het fotoelectrisch effect werkt.
 - Welk spanningsverschil tussen de platen is nodig om te zorgen dat de electronen de anode niet bereiken als er ultraviolet licht (200 nm) gebruikt wordt?
 - Met een electronenbron maken we nu een bundel electronen met een kinetische energie $E_{\text{kin}} = 100 \text{ eV}$. Wat is hun de Broglie golflengte en waar verwacht je het eerste constructieve interferentie patroon als de bundel aan een nikkel oppervlak weerkaatst (afstand tussen nikkel lagen $D = 0.215 \text{ nm}$)?
3. Sterren vormen van moleculaire wolken met hoge dichtheid. Neem aan dat zo'n wolk alleen uit moleculair waterstof (H_2) bestaat met een dichtheid van 10^4 cm^{-3} en een temperatuur van 100 K. We nemen verder aan dat de wolk sferisch is met een diameter van 0.8 pc.
- Leg in je eigen woorden uit hoe de wolk in elkaar stort als hij oorspronkelijk roteert.
 - Is de wolk stabiel? Bereken de tijdschaal voor de instorting.
 - Neem aan dat de extinctie van de wolk $A_V = 10$ is. Met welke factor verandert de helderheid M_V van een A0 hoofdreeksster die achter de wolk staat, als we hem vanaf de Aarde waarnemen?

4. Als de locatie van quantons binnen in een bepaalde potentiaal $V(x)$ beperkt is, noemen we het systeem gebonden. Neem aan dat Ψ_{E_n} een energie eigenfunctie van zo'n gebonden systeem is.
- Leg in je eigen woorden uit waarom golf functies over het algemeen genormaliseerd moeten worden en hoe we de kans kunnen uitrekenen van een bepaald resultaat in een experiment.
 - Laat zien dat de energie eigenfunctie $\Psi_{E_n}(x)$ een stationaire toestand is.
 - Hoe moet je A kiezen om de energie eigenfunctie $\Psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ te normaliseren voor een quanton in een doos tussen $0 \leq x \leq L$ (Hint: $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$).
5. Ster 1 is een M0 hoofdreeksster met een temperatuur van $T = 3300$ K en een straal van $R = 0.63R_{\odot}$; ster 2 is een B0 hoofdreeksster met een temperatuur $T = 21000$ K, $R = 7.6R_{\odot}$, $M_V = -3.7$.
- Bepaal de golflengten waarop de twee sterren het meeste van hun energie uitzenden.
 - Bepaal de relatie tussen de flux van een zwarte straler uitgezonden per golflengteinterval en per frequentieinterval, $I(\lambda, T)$ and $I(\nu, T)$.
 - Geef aan bij benadering hoeveel optische fotonen (550 nm) per seconde er worden uitgestraald door de B0 ster als we aannemen dat de ster 30% van zijn energie bij optische golflengtes afstraalt.

Exam Quantum & Kosmos

(6.2.2009, 14:00 – 17:00)

1. The European Artemis communication satellite was launched in 2001 on a geostationary orbit (a geostationary orbit is a synchronous orbit above the equator that takes 24 hours). It's solar panels are 25 m wide (see also left figure below).
 - (a) What is the velocity of the satellite and its distance from the center of the Earth?
 - (b) How does this compare to the escape velocity from Earth?
 - (c) Suppose that we put an optical telescope (operating at 550 nm) on the Moon. What mirror diameter do we need to resolve the satellite?



2. The right figure above shows an experimental setup for the photoelectric effect. We assume that the metal plates consist of aluminium (work function $W = 4.08$ eV).
 - (a) Explain in your own words how the photoelectric effect works.
 - (b) What potential difference between the plates is required to prevent electrons from reaching the anode if ultraviolet light (200 nm) is used?
 - (c) Using an electron gun, we now prepare a beam of electrons that have a kinetic energy of $E_{\text{kin}} = 100$ eV. What is their de Broglie wavelength and where would you expect the first constructive interference pattern if this electron beam is reflected off a nickel surface (distance between nickel rows $D = 0.215$ nm)?
3. Stars form from dense molecular clouds. Assume that such a cloud consists only of molecular hydrogen (H_2) with a density of 10^4 cm^{-3} and a temperature of 100 K. We further assume that the cloud is spherical with a diameter of 0.8 pc.
 - (a) Explain in your own words how the cloud collapses if it is initially rotating.
 - (b) Is the cloud gravitationally stable? Calculate the timescale for the cloud collapse.
 - (c) Suppose the extinction of the cloud is $A_V = 10$. By which factor does the brightness M_V of an A0 main sequence star located behind the cloud change if we observe it from Earth?

4. When the location of quantons is fixed within a certain potential $V(x)$, we call it a bound system. Suppose Ψ_{E_n} is an energy eigenfunction of such a bound system.
- (a) Explain in your own words why wavefunctions in general need to be normalized and how we can calculate the probability of a particular result in an experiment.
 - (b) Prove that the energy eigenfunction $\Psi_{E_n}(x)$ is a stationary state.
 - (c) How do you have to choose A to normalize the energy eigenfunction $\Psi(x) = A \sin(\frac{n\pi x}{L})$ for a quanton in a box between $0 \leq x \leq L$ (Hint: $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$).
5. Star 1 is an M0 main-sequence star and has a temperature of $T = 3300$ K and a radius of $R = 0.63R_{\odot}$; star 2 is a B0 main-sequence star and has $T = 21000$ K, $R = 7.6R_{\odot}$, $M_V = -3.7$.
- (a) Derive the wavelengths where the two stars emit most of their energy.
 - (b) Derive a relation between the flux of a black body emitted per wavelength interval and per frequency interval, $I(\lambda, T)$ and $I(\nu, T)$.
 - (c) Approximately, how many visible photons (550 nm) per second are emitted by the B0 star if we assume that it radiates 30% of its energy in the visual?

Radiation from a black body of temperature T at the wavelength λ or frequency ν :

$$I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-1} \quad (1)$$

$$I(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \quad (2)$$

Relation between wavelength shift $\Delta\lambda$, rest wavelength λ_0 and radial velocity v_r

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c} \quad (v_r \ll c) \quad (3)$$

Wien's displacement law:

$$\lambda_{\max} T = 0.29 \text{ cm K} \quad (4)$$

Luminosity of a star with radius R

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (5)$$

Relation between optical depth τ , column density N and absorption coefficient κ

$$\tau_\lambda = N\kappa_\lambda \quad (6)$$

Radiative transfer for pure absorption

$$I = I_0 e^{-\tau} \quad (7)$$

Boltzmann formula for a gas of temperature T

$$\frac{n_j}{n_i} = \frac{g_j}{g_i} e^{-(E_j - E_i)/(kT)} \quad (8)$$

Saha equation for a gas with kinetic temperature T

$$\frac{n_e n(X_r + 1)}{n(X_r)} = \frac{2g_{r+1}}{g_r} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} e^{E_{\text{ion}}/(kT)} \quad (9)$$

Ideal gas law relating pressure P , particle density n and temperature T

$$P = nkT \quad (10)$$

Mean velocity of particles with a mass m in a gas of temperature T

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (11)$$

Gravitational Force

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (12)$$

Kepler's third law (orbital period T , semi-major axis a)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{Sun}}} \quad (13)$$

Jeans length and Jeans mass of a cloud with density ρ

$$R_J = \sqrt{\frac{kT}{Gm\rho}} \quad M_J = 4 \left(\frac{kT}{GM} \right)^{3/2} \rho^{-1/2} \quad (14)$$

Free-fall timescale for collapse of a cloud with density ρ

$$t_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \quad (15)$$

Radius of a Strömngren sphere with proton density n_p (number of UV photons N_{UV})

$$R_s = \left(\frac{3N_{\text{UV}}}{4\pi\alpha} \right)^{1/3} n_p^{-2/3} \quad (16)$$

Parallax and distance (rad - radians; " - arcseconds)

$$p(\text{rad}) = \frac{1\text{AU}}{d} \quad d(\text{pc}) = \frac{1}{p(")} \quad (17)$$

Minimum and maximum altitude of a star with declination δ (Φ geographic latitude)

$$a_{\text{max}} = \delta + (90^\circ - \Phi) \quad (18)$$

$$a_{\text{min}} = \delta - (90^\circ - \Phi) \quad (19)$$

Relation between apparent magnitude difference of two stars and their brightness ratio

$$m_2 - m_1 = 2.5 \log_{10} \left(\frac{b_1}{b_2} \right) \quad (20)$$

Distance modulus

$$(m - M) = 5 \log_{10}(d/10 \text{ pc}) \quad (21)$$

Ratio of total-to-selective extinction (A_V extinction in the V filter)

$$R = \frac{A_V}{A_B - A_V} \quad (22)$$

Angle of refraction R (atmosphere pressure P in mbar, temperature T in °C)

$$R = k \tan(z') \quad k = 16.27'' \frac{P}{273 + T} \quad (23)$$

Constructive interference

$$\theta_{nc} = \sin^{-1} \left(\frac{n\lambda}{d} \right) \quad (24)$$

Diffraction of light at a slit (length a) and circular aperture (diameter a)

$$\theta_{1d}(\text{slit}) = \sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{a} \right) \quad \theta_{1d}(\text{circular}) = \sin^{-1} \left(1.22 \frac{\lambda}{a} \right) \quad (25)$$

Energy of a photon

$$E_{\text{ph}} = \frac{hc}{\lambda} \quad (26)$$

Maximum kinetic energy of an electron (W is the work function of the metal)

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{ph}} - W \quad (27)$$

De Broglie wavelength of a quanton

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (28)$$

Energy levels of the hydrogen atom

$$E_n = -\frac{K_e e^2}{2a_0 n^2} \quad (29)$$

Superposition rule for an initial wavefunction ψ_0 after determining some observables a, b with the respective eigenvectors $|a\rangle$ and $|b\rangle$

$$|\Psi_{rc}\rangle = c_a |a\rangle + c_b |b\rangle, \quad \text{where } c_a = A \langle a | \Psi_0 \rangle \quad \text{and} \quad c_b = A \langle b | \Psi_0 \rangle \quad (30)$$

Time evolution of a wavefunction that is expressed as a superposition of its energy eigenfunctions $|E_1\rangle, |E_2\rangle, \dots$ with the corresponding energy eigenvalues E_1, E_2, \dots

$$|\psi(0)\rangle = c_1 |E_1\rangle + c_2 |E_2\rangle + \dots \quad (31)$$

$$|\psi(t)\rangle = c_1 e^{-iE_1 t/\hbar} |E_1\rangle + c_2 e^{-iE_2 t/\hbar} |E_2\rangle + \dots \quad (32)$$

Solar System:

Name	cgs	SI
Distance Earth-Moon	3.85×10^{10} cm	3.85×10^8 m

Constants:

Name	cgs	SI
Gravitation constant G	6.67×10^{-8} cm ³ g ⁻¹ s ⁻²	6.67×10^{-11} m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Speed of light c	2.9979×10^{10} cm/s	2.9979×10^8 m/s
Boltzmann constant k	1.38×10^{-16} erg/K	1.38×10^{-23} J/K
Gas constant R	8.3145×10^7 erg mol ⁻¹ K ⁻¹	8.3145 J mol ⁻¹ K ⁻¹
Planck's constant h	6.62×10^{-27} erg s	6.62×10^{-34} J s
Stefan-Boltzmann constant σ	5.67×10^{-5} erg cm ⁻² s ⁻¹ K ⁻⁴	5.67×10^{-8} W m ⁻² K ⁻⁴
Atomic mass unit u	1.66×10^{-24} g	1.66×10^{-27} kg
Avogadro constant N_A		6.0221×10^{23} mol ⁻¹
Mass of electron m_e	9.11×10^{-28} g	9.11×10^{-31} kg
Mass of a hydrogen atom m_H	1.6736×10^{-24} g	1.6736×10^{-27} kg
Bohr radius a_0	5.29×10^{-9} cm	5.29×10^{-11} m
Coulomb constant K_e		8.99×10^9 N m ² C ⁻²
Elementary charge e		1.6022×10^{-19} C
Astronomical unit AU	1.496×10^{13} cm	1.496×10^{11} m
Parsec pc	3.086×10^{18} cm	3.086×10^{16} m
Solar mass M_\odot	1.989×10^{33} g	1.989×10^{30} kg
Solar radius R_\odot	6.96×10^{10} cm	6.96×10^8 m
Solar luminosity L_\odot	3.85×10^{33} erg/s	3.85×10^{26} W
Earth mass M_{Earth}	5.97×10^{27} g	5.97×10^{24} kg
Earth radius R_{Earth}	6.378×10^8 cm	6.378×10^6 m

Units:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 10^7 \text{ erg} = 10^7 \text{ cm}^2 \text{ g s}^{-2}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 10^7 \text{ erg/s}$$